

Marius Burtea — Georgeta Burtea

Valentin Nicula, Mihaela Marcela Doinaru, Tănțica Dorela Frâncu, Veronica Huiban, Roxana Ilea, Marioara Ilie, Adriana Mariș, Mihaela Munteanu, Silvia Mușătoiu, Vasile Dilimoț Niță, Ana-Raluca Năstase, Ciobanu Paraschiva, Ana Maria Petriceanu, Loredana Popescu, Iuliana Stoica

CLASA a X-a

CULEGERE DE

MATEMATICĂ

Filiera teoretică

specializarea matematică-informatică

- metode de numărare
- matematici financiare
- elemente de geometrie

CAMPION

CUPRINS

Capitolul I. METODE DE NUMĂRARE

1. Mulțimi finite ordonate. Permutări.....	5
2. Aranjamente și combinații.....	9
3. Binomul lui Newton	14
Teste de evaluare	18

CAPITOLUL II. MATEMATICI FINANCIARE

1. ELEMENTE DE CALCUL FINANCIAR.....	20
1.1. Procente.....	20
1.2. Dobânda simplă.....	22
1.3. Dobânda compusă.....	24
1.4. Taxa pe valoarea adăugată (tva). Alte calcule financiare.....	26
2. ELEMENTE DE STATISTICĂ.....	29
2.1. Culegerea, clasificarea, prelucrarea și reprezentarea grafică a datelor statistice.....	29
2.2. Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziție: valoare medie, mediana, modul, dispersie, abatere medie, abatere medie pătratică.....	31
3. ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR.....	37
3.1. Evenimente. Probabilitate.....	37
3.2. Scheme clasice de probabilitate.....	42
3.3. Variabile aleatoare	44
Teste de evaluare	48
PROBLEME RECAPITULATIVE. ALGEBRĂ.....	49

Capitolul III. ELEMENTE DE GEOMETRIE

1. Reper cartezian în plan. Coordonatele unui vector	52
2. Ecuații ale dreptei în plan	57
3. Condiții de paralelism și de perpendicularitate a două drepte.....	62
4. Calculul de distanțe și arii	65
Teste de evaluare	69
PROBLEME RECAPITULATIVE. GEOMETRIE.....	72
Indicații și răspunsuri.....	75
Bibliografie.....	96

1 MULȚIMI FINITE ORDONATE. PERMUTĂRI.*Breviar teoretic*

- O mulțime A este finită dacă este mulțimea vidă sau dacă există un număr natural n astfel încât elementele ei se pot numerota $a_1, a_2, \dots, a_n$.
 n se numește **cardinalul** mulțimii A .
- O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o **mulțime ordonată**.

- Numărul funcțiilor între două mulțimi finite

Fie A și B mulțimi finite nevide și $m = \text{card}(A)$, $n = \text{card}(B)$. Atunci numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$ este egal cu n^m .

- Se numește permutare a mulțimii finite A orice mulțime ordonată care se formează cu elementele sale.
- Numărul permutărilor mulțimii A cu n elemente se notează P_n și este egal cu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Așadar $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

Convenție: $0! = 1$.

- Fie A și B mulțimi finite, nevide cu $m = \text{card}(A)$, $n = \text{card}(B)$.
 - Între mulțimile A și B există cel puțin o funcție bijectivă dacă și numai dacă $m = n$.
 - Numărul funcțiilor bijective $f: A \rightarrow B$ este egal cu $m! = n!$.

Exerciții și probleme rezolvate

- Se consideră mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 9\}$.

Să se scrie mulțimile ordonate formate folosind elementele mulțimii A și în care 2 are rangul

Avem că $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Mulțimile ordonate cerute sunt: mulțimi cu 3 elemente sau cu 4 elemente în care 2 este al treilea element. Se obțin mulțimile ordonate:

$\{0, 1, 2\}$, $\{0, 3, 2\}$, $\{1, 0, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{3, 0, 2\}$, $\{3, 1, 2\}$

$\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 3, 2, 1\}$, $\{1, 0, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2, 0\}$, $\{3, 1, 2, 0\}$, $\{3, 0, 2, 1\}$.

- Se consideră mulțimile finite A și B cu $\text{card } A = 5$ și $\text{card}(B) = n$. Să se determine n știind că se pot defini 32 de funcții de la A la B .

Numărul funcțiilor $f: A \rightarrow B$ este egal cu $(\text{card } B)^{\text{card } A} = n^5$. Rezultă ecuația $n^5 = 32$ cu soluția $n = 2$.

- Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea $f(1) = f(3)$.

Deoarece $f(1) = f(3) \in \{1, 2, 3, 4\}$, revine la a determina numărul de funcții definite pe o mulțime cu 3 elemente cu valori în alta cu 4 elemente. Rezultă că sunt $4^3 = 64$ funcții.

4. Se dă mulțimea $A = \{-3, 1, 4\}$. Să se scrie toate permutările mulțimii A .

Mulțimea A are cardinalul $n = 3$. Rezultă că ea are $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ permutări. Acestea sunt :
 $(-3, 1, 4), (-3, 4, 1), (1, -3, 4), (1, 4, -3), (4, -3, 1), (4, 1, -3)$.

5. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma folosindu-se numai cifrele 0, 1, 2, 3?

Problema revine la a determina numărul de permutări ale mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3\}$ din care trebuie excluse acele permutări care au 0 pe prima poziție, căci un număr natural nu poate avea prima cifră nulă.

Așadar, numărul numerelor formate cu 4 cifre distincte din A este egal cu:

$$P_4 - P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

6. Să se determine numerele naturale care sunt soluții ale ecuațiilor:

a) $(n+2)! = 20n!$; b) $\frac{2(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{(n+2)!}{n!} = 4$.

a) Se scrie $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$. Ecuația devine: $n!(n+1)(n+2) = 20n!$. Împărțim ecuația cu $n! \neq 0$ și se obține $(n+1)(n+2) = 20$ care este echivalentă cu $n^2 + 3n - 18 = 0$.

Se obțin soluțiile $n_1 = 3$, $n_2 = -6$.

Punem condiția ca $n \in \mathbb{N}$ și se reține doar soluția $n = 3$.

b) Înlocuim $(n+1)! = (n-1)!n(n+1)$ și $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$.

Ecuația se transformă succesiv astfel:

$$\frac{2(n-1)!n(n+1)}{(n-1)!} - \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = 4 \Leftrightarrow 2n(n+1) - (n+1)(n+2) = 4 \Leftrightarrow n^2 - n - 6 = 0.$$

Se obțin soluțiile $n_1 = 3$, $n_2 = -2$. Condițiile de existență a factorilor sunt:

$n-1 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$, $n+2 \in \mathbb{N}$. Ca urmare, soluția ecuației inițiale este $n = 3$.

7. a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea $k!k = (k+1)! - k!$.

b) Să se calculeze suma: $1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + 20!20$.

a) Avem: $(k+1)! - k! = k!(k+1) - k! = k!(k+1-1) = k!k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) Folosim identitatea de la punctul a) și suma se scrie:

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + (21! - 20!) = -1! + 21! = 21! - 1.$$

8. Se consideră mulțimea finită A cu $\text{card}(A) = n$. Câte elemente are A dacă există 5040 funcții bijective $f: A \rightarrow A$?

Numărul de funcții bijective este $n!$. Rezultă ecuația $n! = 5040$. Se obține $n = 7$.

9. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul de funcții bijective $f: A \rightarrow A$ cu proprietatea $f(1) = 2$.

Deoarece $f(1) = 2$ și f este bijectivă, revine la a determina numărul funcțiilor bijective definite pe mulțimea $B = \{2, 3, 4, 5\}$ cu valori în mulțimea $C = \{1, 3, 4, 5\}$. Se obțin 4! funcții, adică 24.

1. Să se determine mulțimile ordonate ce se pot forma cu elementele mulțimii:

a) $\{0, 2, 3\}$; b) $\{a, -1\}$; c) $\{x, y, z, t\}$; d) $\{1, 3\}$.

2. Să se scrie mulțimile ordonate formate cu elementele mulțimii A în cazurile:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 6\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 3| \leq 2\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

3. Să se scrie submulțimile ordonate ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ care au suma elementelor 9.

4. Scrieți mulțimile ordonate cu 2 elemente ale mulțimii A dacă:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 12 \text{ și } n \text{ divide } 32\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0\}$.

5. Scrieți submulțimile ordonate ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2(x^2 + 8) = 4\}$.

6. Fie mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. Să se determine numărul de funcții $f: A \rightarrow B$. Să se scrie funcțiile.

7. Fie mulțimile $A = \{2, 5, 14\}$ și B . Să se determine câte elemente are mulțimea B dacă există 64 de funcții $f: A \rightarrow B$.

8. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ care verifică relația $f(2) = 2$.

9. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.

10. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.

11. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.

12. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care au proprietatea că $f(1) + f(3) = 7$.

13. Să se scrie permutările mulțimilor

a) $\{x, 1, y\}$; b) $\{-2, 2\}$; c) $\{a, 1, b, 2\}$.

14. Să se determine numărul de permutări ale mulțimilor:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 6\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0\}$.

15. Calculați:

a) $\frac{7!}{8!}$; b) $\frac{211!}{209!}$; c) $\frac{11!}{14!} + \frac{12!}{15!}$; d) $\frac{17! - 18!}{19!}$;
e) $\frac{(n-9)!}{(n-7)!}$; f) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$; g) $\frac{(n+8)!}{(n+6)! + (n+7)!}$; h) $\frac{(n+3)! - (n+4)!}{(n+4)! - (n+5)!}$.

Așadar, se obține numărul $A_{10}^6 - A_9^5$.

3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $A_{n+2}^5 = 18A_n^4$; b) $8A_{x+1}^5 = 3P_x \cdot A_x^5$.

a) Se explicitează aranjamentele din cei doi termeni și se obține:

$$\frac{(n+2)!}{(n-3)!} = \frac{18n!}{(n-4)!} \Leftrightarrow (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = 18(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)[(n+1)(n+2) - 18(n-3)] = 0. \quad (1)$$

Condiția de existență a aranjamentelor conduce la $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Rezultă că din (1) se obține numai $(n+1)(n+2) - 18(n-3) = 0$, adică $n^2 - 15n + 56 = 0$ cu soluțiile $n_1 = 7$, $n_2 = 8$.

b) Avem succesiv: $\frac{8 \cdot (x+1)!}{(x-4)!} = 3 \cdot 3! \cdot \frac{x!}{(x-5)!}$ cu condiția $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 5$

$$\Leftrightarrow \frac{8 \cdot (x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)}{(x-4)!} = \frac{3 \cdot 6 \cdot (x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) \cdot x}{(x-5)!}, \quad x \geq 5,$$

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 8(x+1) = 18(x-4), \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 4 \Leftrightarrow 5x - 40 = 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 4. \text{ Se obține soluția } x = 8.$$

4. Într-o clasă sunt 32 de elevi, dintre care 22 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

Soluție

Clasa este formată din 22 fete și 10 băieți.

3 fete se pot alege dintre 22 fete în C_{22}^3 moduri.

2 băieți se pot alege dintre cei 10 băieți în C_{10}^2 moduri.

Rezultă că un comitet din 3 fete și 2 băieți se poate alege în $C_{22}^3 \cdot C_{10}^2$ moduri.

5. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine numărul de submulțimi ale mulțimii A care au 3 elemente dintre care exact un element este număr par.

Mulțimea A conține 3 numere pare și 3 numere impare.

Fie $\{x, y, z\}$ o submulțime a mulțimii A cu x număr par și y, z impare. Elementul x poate fi ales în C_3^1 moduri din mulțimea A iar elementele y, z pot fi alese în C_3^2 moduri.

Rezultă că numărul total de submulțimi cu 3 elemente ale lui A care conțin un singur număr par este egal cu produsul $C_3^1 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

6. Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^1 + n = n^2 + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Explicităm fiecare element combinatoric și se obține succesiv:

$$\frac{(n+2)!}{(n+2-1)!1!} + n = n^2 + 3, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0. \text{ Se obține soluția } n = 1.$$

7. Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} 8C_x^{y-3} = C_x^{y-2} \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$